Critère de Sylvester

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne habituelle.

Théorème : Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $1 \leq k \leq n$ on définit $M_k := (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$. Alors M est définie positive ssi $\det(M_k) > 0$ pour tout k.

Lemme : Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel normé E et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Si $q_{|F}$ est définie positive par q alors $F \oplus F^\perp = E$.

Application : La matrice $A = \left(\dfrac{1}{|i-j|+1} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est définie positive.

Preuve du lemme : On se donne les objets de l'énoncé et on note B la forme bilinéaire associé à q. Si $x \in F \cap F^\perp$ alors $B(x,x) = 0$ donc $x = 0$ car $q_{|F}$ est définie positive. Ainsi $F \cap F^\perp = \{0\}$. Soit maintenant $x \in F$. On peut se donner une base $q_{|F}$ orthogonale de F $(f_1, ..., f_n)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on pose $\lambda_i = \dfrac{B(x, f_i)}{B(f_i, f_i)}$, qui est bien définie par hypothèse. On a alors d'un côté $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in F$ et d'un autre, si $y := x - \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ et $1 \leq k \leq n$,

$$B(y, f_k) = B(x, f_k) - \lambda_k B(f_k, f_k) = 0,$$

où la somme a disparu car la base est prise orthogonale.
Comme B est bilinéaire le fait que y soit orthogonale aux vecteurs d'une base de F suffit à dire que y est dans $F^\perp$ et on a bien la décomposition voulue car $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + y$.

Preuve du théorème : $\Rightarrow$ Supposons que M soit définie positive et donnons-nous $1 \leq k \leq n$. On note q sa forme associée et q_k celle associée à M_k. On sait alors que q_k est aussi définie positive. D'après la loi d'inertie de Sylvester il existe P inversible telle que la matrice de q_k dans la base associée à P soit égale à ${}^tPI_kP$ et donc $\det(M) = \det(P)^2 > 0$.

$\Leftarrow$ Montrons le résultat par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat. On suppose alors le résultat vrai pour tout $1 \leq k \leq n-1$. Montrons que le résultat est vrai pour n.
Soit M comme dans l'énoncé. L'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ nous dit que q_{n-1} est définie positive. Donc il existe une base $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ telle que $Mat_{\mathcal{F}} q_{n-1} =^t PI_{n-1}P$ où P est la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{F}$. De plus le lemme nous dit que $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$ donc on peut se donner un vecteur non nul v de $F^\perp$. On a alors $Mat_{(e_1,...,e_{n-1},b)} q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & q(v) \end{pmatrix}$ et donc $q(v) = \det(P)^2 \det(M) > 0$ d'où $q(v) > 0$ et donc la signature de q est $(n, 0)$ donc M est bien définie positive.$\square$

Preuve de l'application : On commence par définir $M : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à t associe $(t^{|i-j|})_{1\leq i,j\leq n}$. Montrons que $M(t)$ est symétrique définie positive pour tout $t \in]0,1[$. Soit donc $t \in]0,1[$. On montre par récurrence sur k que $\det(M(t)_k) = (1-t^2)^{k-1}$. L'initialisation est directe. On suppose alors le résultat vrai pour tout $i \leq k-1$. On sait que le déterminant est invariant par opération élémentaire, on a donc l'égalité suivante :

$$\det(M(t)_k) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{k-1} \\ t & & & \\ \vdots & & & \\ t^{n-1} & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & 0 \\ t & & & 0 \\ \vdots & & & \\ t^{n-1} & & & 1-t^2 \end{vmatrix}$$

en faisant l'opération $C_k \leftarrow C_k - tC_{k_1}$. En développant par rapport à la dernière colonne on trouve le résultat voulu à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

Pour finir, comme il est clair que A est symétrique, on se donne un vecteur colonne non nul X de $\mathbb{R}^n$ et on veut montrer que l'on a ${}^tXAX > 0$. On vient de montrer que pour tout $0 < t < 1$, ${}^tXM(t)X > 0$. Ainsi l'application $\varphi : t \in]0,1[\mapsto^t XM(t)X$ est strictement positive et continue car polynomiale en t. Mais on peut remarquer que $A = \displaystyle\int_0^1 M(t)\mathrm{d}t$ (on entend bien coefficient par coefficient) donc ${}^tXAX = tX \displaystyle\int_0^1 M(t)\mathrm{d}tX = \displaystyle\int_0^1 tXM(t)X\mathrm{d}t > 0$ car une fonction continue strictement positive sur un ensemble de mesure non nul est strictement positive (le plus simple est de faire une preuve en ε).$\square$

Remarques importantes :

- Il faut être au clair sur la réduction des formes quadratiques
- On peut rédiger cette preuve de plein de manières différentes, n'hésitez pas à la retravailler à votre sauce !